

不等式选讲 (二)

【例题】 求证: $(a^2 + b^2)(c^2 + d^2) \geq (ac + bd)^2$

【例题】 分析二次函数

$f(x) = (a_1x + b_1)^2 + (a_2x + b_2)^2 + \cdots + (a_nx + b_n)^2$ 是否存在实根, 并研究其判别式.

【例题】 (2013年湖北理13) 设 $x, y, z \in R$, 且满足:

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1, x + 2y + 3z = \sqrt{14},$$

则 $x + y + z =$ _____.

【例题】 设 x, y, z 是正数, 且 $x^2 + 4y^2 + 9z^2 = 4, 2x + 4y + 3z = 6$

则 $x + y + z =$ _____.

【例题】 若 $2x + 3y + 5z = 29$, 则

$f(x) = \sqrt{2x+1} + \sqrt{3y+4} + \sqrt{5z+6}$ 的最大值为 _____.

【例题】 (2013年新课标 II 理24) 设 a, b, c 均为正数, 且

$a + b + c = 1$, 证明:

(I) $ab + bc + ca \leq \frac{1}{3}$; (II) $\frac{a^2}{b} + \frac{b^2}{c} + \frac{c^2}{a} \geq 1$.

【例题】 (2011年安徽理19)

(I) 设 $x \geq 1, y \geq 1$, 证明 $x + y + \frac{1}{xy} \leq \frac{1}{x} + \frac{1}{y} + xy$,

(II) $1 \leq a \leq b \leq c$, 证明

$\log_a b + \log_b c + \log_c a \leq \log_b a + \log_c b + \log_a c$.