

核心考点——不等式问题

【例1】 求证： $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} > \ln(n+1)$

【例2】 (2011年湖北理科21 (I) (II) ①)

(I) 已知函数 $f(x) = \ln x - x + 1, x \in (0, +\infty)$,

求函数 $f(x)$ 的最大值;

(II) 设 $a_k, b_k (k = 1, 2, 3 \dots n)$ 均为正数,

证明: 若 $a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n \leq b_1 + b_2 + \dots + b_n$,

则 $a_1^{b_1} a_2^{b_2} \dots a_n^{b_n} \leq 1$ 。

【例3】 (2013年大纲理22改编) 已知函数

$$f(x) = \ln(1+x) - \frac{x \left(1 + \frac{1}{2}x\right)}{1+x}$$

(I) 当 $x \geq 0$ 时, 求函数 $f(x)$ 的最大值;

(II) 设数列 $\{a_n\}$ 的通项 $a_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}$.

证明 $a_{2n} - a_n + \frac{1}{4n} > \ln 2$.